Beweis der Irrationalität der Wurzel aus 2 durch Widerspruch

Angenommen, die Wurzel aus 2 ist rational, dann lässt sie sich als vollständig gekürzter Bruch zweier natürlicher Zahlen a und b schreiben

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{N} \;\text{ und }\; b \neq 0.$$

Quadrieren ergibt

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

oder

$$2b^2 = a^2.$$

Daraus folgt, dass a^2 und damit auch a gerade ist.[1] Die Zahl a kann daher geschrieben werden als

$$a = 2c, \quad \text{mit } c \in \mathbb{N}.$$

Dies setzen wir in die vorangehende Gleichung ein:

$$2b^2 = (2c)^2 = 4c^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = 2c^2,$$

woraus folgt, dass auch b gerade ist. Das würde heissen

$$\frac{a}{b} = 2d, \quad \text{mit } d \in \mathbb{Q}.$$

Entgegen der Voraussetzung ist nun $\frac{a}{b}$ kein vollständig gekürzter Bruch und somit im Widerspruch zu der Annahme, dass sich $\sqrt{2}$ als ein solcher schreiben lässt.

QED

[1] Dies kann sehr einfach durch die Kontraposition gezeigt werden:

$$a^2 \text{ gerade} \Rightarrow a \text{ gerade} \quad \Leftrightarrow \quad \neg(a \text{ gerade}) \Rightarrow \neg(a^2 \text{ gerade}).$$

Wir müssen also beweisen: ist a ungerade so folgt daraus, dass auch a^2 ungerade ist.

Eine ungerade Zahl kann geschrieben werden als

$$a = 2k + 1, \; k \in \mathbb{N}$$

und quadriert

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{\underbrace{2(2k^2 + 2k)}_{gerade} + 1}_{ungerade}.$$

QED