Moiré von Strahlen und Kreisspiegelung

In diesem Artikel untersuchen wir eine geometrische Übereinstimmung zwischen Moirémustern und der Kreisspiegelung (Inversion am Kreis). Speziell wird gezeigt, dass Moiré-Kurven, die durch zwei horizontal verschobene radiale Geradenbüschel erzeugt werden, ein elliptisches Kreisbüschel bilden. Wir beweisen dann, dass diese Schar von Moiré-Kreisen identisch mit Kreisen ist, die durch die Anwendung einer Kreisspiegelung auf ein radiales Geradenbüschel entstehen. Für den nächsten Abschnitt verwenden wir die Methode der Indizialgleichung, siehe unseren vorherigen Artikel [1] und die darin enthaltenen Referenzen.

Radiale Strahlen. Wir betrachten zwei radiale Geradenbüschel. Das Zentrum des ersten Büschels liegt im Ursprung $(0,0)$, und das zweite ist horizontal um die Distanz s nach $(s,0)$ verschoben. Die beiden Geradenbüschel sind durch ihre Winkel α und β definiert:

$$y = x\tan\alpha$$
$$y = (x-s)\tan\beta$$

In diesem Fall sind die Indizes der Büschel die Winkel selbst. Die Indizialgleichung stellt eine einfache Beziehung zwischen diesen Winkeln dar:

$$\alpha - \beta = q$$

wobei q eine Konstante ist, welche die resultierenden Moiré-Streifen indiziert.

Schritt 1: Auflösen nach den Indizes α und β aus den Geradengleichungen.

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{y}{x-s}\right)$$

Schritt 2: Einsetzen dieser Ausdrücke in die Indizialgleichung.

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \arctan\left(\frac{y}{x-s}\right) = q$$

Schritt 3: Vereinfachen der Gleichung. Zur Vereinfachung wenden wir den Tangens auf beide Seiten an. Sei $k := \tan(q)$, was für jeden Moiré-Streifen eine Konstante ist. Für den Tangens einer Differenz nutzen wir das Additionstheorem $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$, wobei wir $\tan\alpha = y/x$ und $\tan\beta = y/(x-s)$ einsetzen:

$$k = \frac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x-s}}{1 + \dfrac{y}{x}\dfrac{y}{x-s}} = \frac{-ys}{x^2 - sx + y^2}$$

Umstellen dieses Ausdrucks ergibt:

$$\boxed{k(x^2 - sx + y^2) + ys = 0}$$

Beachte: Für $k = 0$ vereinfacht sich die Gleichung zu $y = 0$, also der x-Achse. Für $k \neq 0$ dividieren wir durch k und führen eine quadratische Ergänzung durch:

$$\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{s}{2k}\right)^2 = \frac{s^2}{4}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$$

Ergebnis. Die letzte Gleichung beschreibt eine Schar von **Kreisen**. Jeder Kreis ist im Punkt $\left(\frac{s}{2}, -\frac{s}{2k}\right)$ zentriert und hat einen Radius von $\frac{|s|}{2}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$, wobei $k = \tan(q)$ ist. Eine Veranschaulichung mit GeoGebra findet sich hier [4]. Zur historischen Einordnung siehe auch [2].

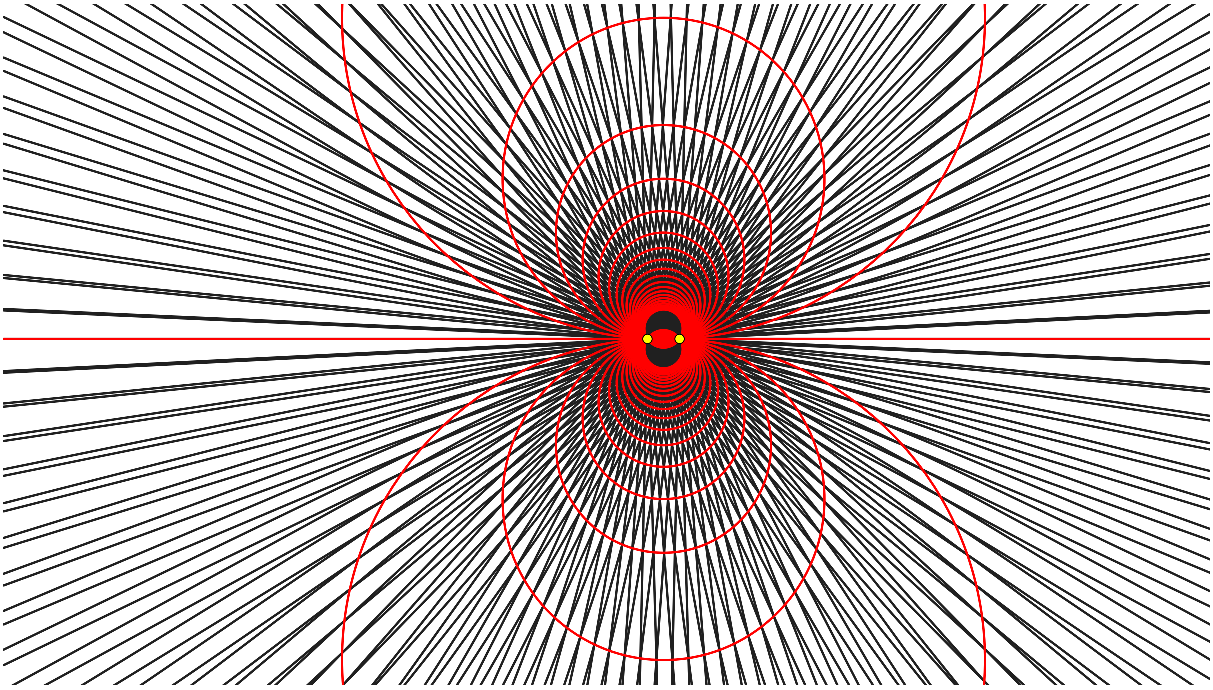

Abbildung 1. Ein elliptisches Kreisbüschel als Moiré-Kurven zweier radialer Geradenbüschel.

Ein Kreisbüschel unter Kreisspiegelung. Die im vorherigen Abschnitt hergeleiteten Moiré-Kreise schneiden sich in zwei diskreten Punkten: $(0,0)$ und $(s,0)$. Dies ist mathematisch als *elliptisches Kreisbüschel* bekannt. Um exakt diese Schar von Kreisen durch Inversion zu erhalten, müssen wir eine Schar von *zusammenlaufenden Geraden* am Kreis invertieren.

Betrachten wir eine Geradenschar, die durch einen festen Punkt $(d,0)$ auf der x-Achse verläuft

$$y = m(x-d)$$

Dabei ist m der variierende Steigungsparameter der Geraden.

Die Kreisspiegelung eines Punktes P auf den Punkt P' ist gegeben durch $\overline{OP}\cdot\overline{OP'} = R^2$ mit dem Ursprung O als Zentrum der Inversion und R als Radius des Inversionskreises, siehe z.B. [3]. Anwendung ergibt

$$\frac{y'R^2}{x'^2+y'^2} = m\left(\frac{x'R^2}{x'^2+y'^2} - d\right)$$

Multiplikation beider Seiten mit $\frac{x'^2+y'^2}{d}$ und Umstellen der Terme führt auf

$$x'^2 + y'^2 - \frac{R^2}{d}x' + \frac{R^2}{md}y' = 0$$

Definieren wir die Distanz $s = \frac{R^2}{d}$. Einsetzen in unsere invertierte Gleichung liefert:

$$x'^2 + y'^2 - sx' + \frac{s}{m}y' = 0$$

Setzen wir nun $k = m$ und multiplizieren mit k, entspricht die Gleichung perfekt unserem Moiré-Ergebnis aus der Indizialgleichung:

$$\boxed{k(x'^2 - sx' + y'^2) + y's = 0}$$

Ergebnis. Die Moiré-Streifen zweier horizontal verschobener radialer Geradenbüschel erzeugen ein elliptisches Kreisbüschel, das durch die Zentren der beiden Büschel verläuft. Unter Kreisspiegelung entspricht diese Schar exakt der Inversion eines radialen Geradenbüschels (einer Strahlengrafik). Wegen $m = k = \tan(q)$ sind es Strahlen mit gleichmässiger Winkelverteilung.

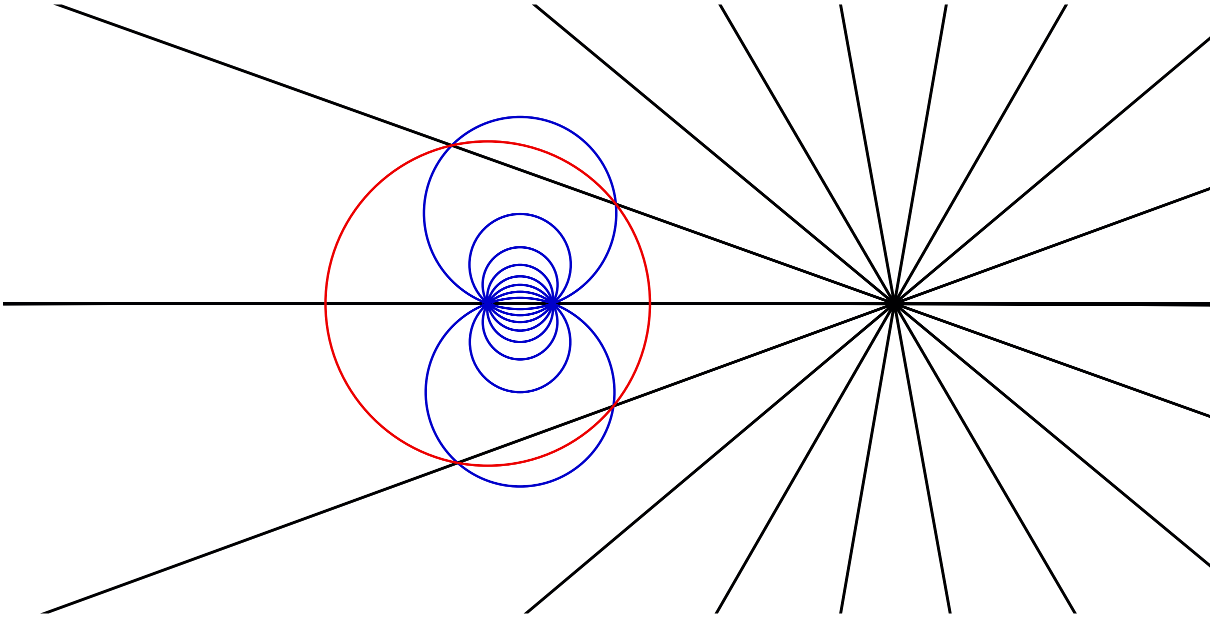

Abbildung 2. Ein elliptisches Kreisbüschel (blau) als Bild radialer Strahlen (schwarz) unter Inversion am Kreis (rot).

Anhang: Parallele Geraden unter Kreisspiegelung. Es wird die Kreisspiegelung einer Schar paralleler Geraden analysiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir eine Geradenschar, definiert durch $x = c$, wobei c der Scharparameter ist.

Bei Anwendung einer Kreisspiegelung mit dem Zentrum im Ursprung und Radius R transformieren sich die Koordinaten gemäss $x = \frac{x'R^2}{x'^2+y'^2}$ und $y = \frac{y'R^2}{x'^2+y'^2}$. Das Einsetzen von x in unsere Geradengleichung ergibt:

$$\frac{x'R^2}{x'^2 + y'^2} = c \implies x'^2 + y'^2 - \frac{R^2}{c}x' = 0$$

Quadratische Ergänzung liefert:

$$\left(x' - \frac{R^2}{2c}\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{R^2}{2c}\right)^2$$

Diese Gleichung beschreibt eine Kreisschar, welche die y-Achse im Ursprung tangieren. Da sie sich nur in einem einzigen Punkt schneiden, bilden sie ein *parabolisches Kreisbüschel.*

Literatur

[1] „Indizialgleichung zur Berechnung von Moirémustern“. moireberechnungen.pdf

[2] Blaschke, W., Bol, G.: „Geometrie der Gewebe. Topologische Fragen der Differentialgeometrie.“ Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete; Band 49. Julius Springer, Berlin, 1938. §2, S. 19. gdz.sub.uni-goettingen.de.

[3] „Inversion” de.wikipedia.org

[4] „GeoGebra Applet” für den Moiré-Effekt raysgeogebra.html

[5] „GeoGebra Applet” für die Kreisspiegelung KreisInversion2.html (Strahlen), KreisInversion1.html (Parallelen)

[6] „The Moiré-Museum“. www.sqrt.ch/museum