Beweis der Madhava-Reihe für π

Behauptung: Die Zahl π lässt sich schreiben als

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots\right).$$

Beweisidee: Suche eine einfach berechenbare Reihe, welche diese alternierende Summe ergibt und sich mit π verbinden lässt. Letzteres ruft sofort trigonometrische Funktionen auf den Plan; diese besitzen eine Darstellung mit einer Taylorreihe.

Erkundung: Wir starten mit der [Taylor-Reihe]

$$Tf(x;a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + \dots$$

von $f(x) = \arctan(x)$ an der Entwicklungsstelle $a = 0$, wobei $|x| \leq 1$. Beachte, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ist.

$$\begin{aligned}
\arctan(x) = Tf(x;a) = \arctan(a)& \\
&+ \frac{1}{a^2+1}(x-a) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{-2a}{(a^2+1)^2}(x-a)^2 \\
&+ \frac{1}{6}\frac{-2(-3a^2+1)}{(a^2+1)^3}(x-a)^3 \\
&+ \frac{1}{24}\frac{24a(-a^2+1)}{(a^2+1)^4}(x-a)^4 \\
&+ \frac{1}{120}\frac{24(5a^4-10a^2+1)}{(a^2+1)^5}(x-a)^5 \\
&+ \frac{1}{720}\frac{240a(-3a^4+10a^2-3)}{(a^2+1)^6}(x-a)^6 \\
&+ \frac{1}{5040}\frac{720(7a^6-35a^4+21a^2-1)}{(a^2+1)^7}(x-a)^7 \\
&+ \dots \\
Tf(x;0) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3} + 0 + \frac{x^5}{5} + 0 - \frac{x^7}{7} \pm \dots&
\end{aligned}$$

Terme gerader Ableitung fallen ganz weg. Wir haben also

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots \tag{1}$$

Durch Einsetzen von $x = 1$ in (1) erhalten wir die Behauptung

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots$$

Diese Erkundung zeigt, dass sich der Arcustangens mit der alternierenden Reihe in Verbindung bringen lässt. Somit können wir ohne die saloppe (aber sprechende!) Schreibweise mit Auslassungspunkten einen richtigen Beweis führen.

Beweis: Wir starten mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n = 1 + y + y^2 + y^3 + \ldots$$

mit $|y| < 1$. Es gilt für die Summe der unendlichen geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} y^k = \lim_{n\to\infty} 1 \frac{1 - y^n}{1 - y} = \frac{1}{1 - y}.$$

Darin substituieren wir $y = -x^2$, was

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

ergibt. Durch Integration erhält man mit $0 \leq t \leq 1$

$$\int_0^t \frac{1}{x^2+1}\, \mathrm{d}x = \arctan(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1} \quad \text{und bei } t = 1 \quad \arctan(1) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

□

---

zurück zu SQRT.CH