NEWTON schreibt im Rückblick auf seine Entdeckung des Gravitationsgesetzes:

«Im selben Jahr (1666) begann ich darüber nachzudenken, ob die Schwerkraft bis zur Umlaufbahn des Mondes reicht. Nachdem ich herausgefunden hatte, wie die Kraft abzuschätzen ist, mit der eine in einer Kugel umlaufende Kugel auf die Kugel der Oberfläche drückt (wir würden sagen: Untersuchung der Kreisbewegung; Zentripetalkraft), leitete ich aus KEPLERs Regel, nach der sich die periodischen Zeiten der Planeten im Verhältnis drei zu zwei zum Abstand vom Mittelpunkt ihrer Umlaufbahn verhalten, ab, dass die Kräfte, die die Planeten in ihren Umlaufbahnen halten, dem Quadrat ihrer Abstände von jenen Zentren, um die sie laufen, reziprok sein müssen.»

Die entsprechende Rechnung mit den von uns heute verwendeten Grössen: Führt der Himmelskörper der Masse m eine gleichförmige Kreisbewegung im (Mittelpunkts-)Abstand r um den Zentralkörper der Masse M mit der Winkelgeschwindigkeit ω bzw. der Umlaufdauer T aus, so wirkt die Kraft F zwischen diesen beiden Massen als Zentripetalkraft:

$$F = F_{\mathrm{Z}} = m \cdot r \cdot \omega^2 = m \cdot r \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 = m \cdot r \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2}. \quad (1)$$

Setzt man darin die umgeformte Formel des 3. KEPLERschen Gesetzes

$$\frac{T^2}{r^3} = C \Leftrightarrow T^2 = C \cdot r^3 \quad (2)$$

ein, so erhält man

$$F = m \cdot r \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{C \cdot r^3} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{C} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad (3)$$

womit gezeigt ist, dass

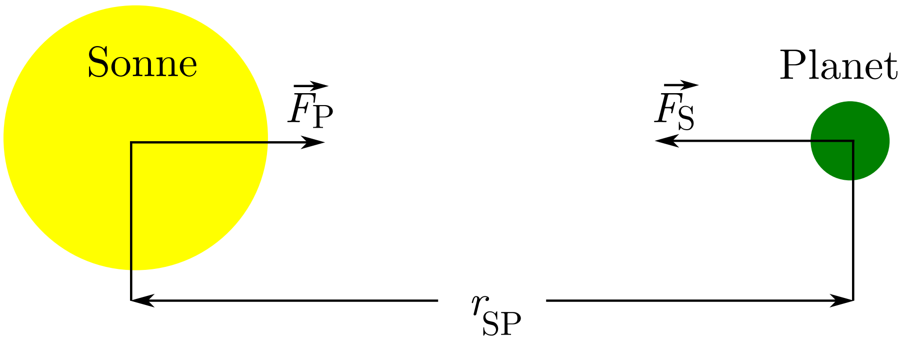
$$F \propto m \cdot \frac{1}{r^2} \qquad \propto \text{ bedeutet ‹ist proportional zu›.}$$

Für die Zentripetalbeschleunigung ergibt sich direkt

$$a_{\mathrm{Z}} = \frac{F_{\mathrm{Z}}}{m} = \frac{4 \cdot \pi^2}{C} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (4)$$

oder aus (1)

$$a_Z = \frac{F_Z}{m} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2}. \quad (5)$$



Ist $\vec{F}_P$ die Kraft, welche der Planet auf die Sonne ausübt, $\vec{F}_S$ die Kraft, welche die Sonne auf den Planeten ausübt und r_{SP} die Entfernung der Mittelpunkte von Sonne und Planet, dann gilt nach dem 3. NEWTONschen Axiom («actio gleich reactio»)

$$\vec{F}_S = -\vec{F}_P$$

bzw. für die Beträge

$$F_S = F_P. \quad (6)$$

Mit Hilfe von Gleichung (3) ergibt sich nun für F_S (unter Beachtung, dass als Zentralkörper die Sonne fungiert und deshalb $C = C_S$ ist):

$$F_S = \frac{m_P}{C_S} \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{r_{SP}^2} \quad (7)$$

bzw. für F_P (unter Beachtung, dass als Zentralkörper der Planet fungiert und deshalb $C = C_P$ ist)

$$F_P = \frac{m_S}{C_P} \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{r_{SP}^2}. \quad (8)$$

Damit ergibt sich aus (6)

$$F_S = F_P \Leftrightarrow \frac{m_P}{C_S} \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{r_{SP}^2} = \frac{m_S}{C_P} \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{r_{SP}^2} \Leftrightarrow \frac{m_S}{C_P} = \frac{m_P}{C_S} \Leftrightarrow m_S \cdot C_S = m_P \cdot C_P.$$

Hieraus sieht man, dass das Produkt aus der Konstanten C (im dritten Gesetz von KEPLER) und der zugehörigen Zentralmasse m offensichtlich stets konstant ist. Das Produkt $m \cdot C$ ist für alle Körper gleich und stellt eine universelle Naturkonstante dar. Erweitert man z.B. in Gleichung (7) den Bruch auf der rechten Seite mit m_{S}, so ergibt sich für die Kraft (Index wird jetzt weggelassen)

$$F = \frac{4 \cdot \pi^2}{m_{\mathrm{S}} \cdot C_{\mathrm{S}}} \cdot \frac{m_{\mathrm{S}} \cdot m_{\mathrm{P}}}{r_{\mathrm{SP}}^2}.$$

Nach dem bisher Gesagten stellt der vordere Bruch eine Konstante dar, die man als die Gravitationskonstante G bezeichnet. Somit gilt

$$F = G \cdot \frac{m_{\mathrm{S}} \cdot m_{\mathrm{P}}}{r_{\mathrm{SP}}^2}$$

und losgelöst von Sonne und Planet

$$\boxed{F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2}}$$

Für die Gravitationskonstante G gilt

$$G = \frac{4 \cdot \pi^2}{m_{\mathrm{S}} \cdot C_{\mathrm{S}}} \Rightarrow G = \frac{4 \cdot \pi^2}{1.99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} \cdot 2.97 \cdot 10^{-19}\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^3}} = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$$

Notiz am Rande: Der Nachweis, dass die Himmelskörper bei diesen Rechnungen wie Massenpunkte behandelt werden dürfen, stammt ebenfalls von NEWTON.

Quelle: leifiphysik.de