Gegenseitige Verfolgung im regulären n-Eck

Satz 1: Zu jedem Zeitpunkt der Verfolgung im regulären n-Eck bilden die Punkte (Mäuse) wieder ein reguläres n-Eck, sofern alle Mäuse pro Zeitschritt dieselbe Geschwindigkeit haben (v = konst).

Beweis: Zum Ausgangszeitpunkt t_0 bilden die n Mäuse nach Voraussetzung ein reguläres n-Eck. Sei nun

$$t' = t_0 + \Delta t$$

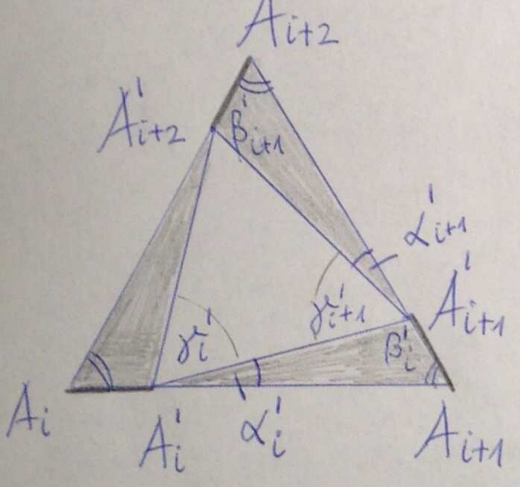
der Zeitpunkt der ersten Neuorientierung der Mäuse in Richtung ihrer Zielmaus. Zu diesem Zeitpunkt t' haben die n Mäuse bereits jeweils die Strecke $\overline{A_i A_i'}$ $(1 \leq i \leq n)$ zurückgelegt.

Wegen v = konst gilt

$$\overline{A_1 A_1'} = \overline{A_2 A_2'} = \ldots = \overline{A_n A_n'},$$

weshalb die $\triangle A_i' A_{i+1}' A_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n \text{ und } n+1 \equiv 1 \bmod n)^{\circledast}$ kongruent sind. Die n Mäuse bilden folglich zum Zeitpunkt t' ein gleichseitiges n-Eck. Wegen $\gamma_i' = \gamma_{i+1}'$ für ⊛ ist das n-Eck regulär □

Veranschaulichung am Dreieck



Da $\alpha_i' = \alpha_{i+1}'$ für ⊛ ist auch $\beta_i' = \beta_{i+1}'$ und damit

$$\gamma_i' = \gamma_{i+1}'$$

für ⊛

Satz 2: Der Koordinatenursprung liege im Zentrum des Ausgangspolygons. Dann schliesst der Ortsvektor $r(t)$ einer Maus mit seinem zugehörigen Geschwindigkeitsvektor $v(t)$ zu jedem Zeitpunkt der Verfolgung einen konstanten Winkel λ_n ein. Es gilt

$$\lambda_n = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

Beweis: Der Geschwindigkeitsvektor ist n. V. zur Strecke $\overline{A_i A_{i+1}}$ $(1 \leq i \leq n)$ parallel. Zerlegt man das reguläre n-Eck in geeignete Dreiecke, so erhält man

$$\lambda_n = \pi - \left(\frac{\pi - \frac{2\pi}{n}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{2}{n}\right) \qquad \square$$

Folgerung: Da der Winkel zwischen dem Ortsvektor und dem Geschwindigkeitsvektor (und damit dem Tangentialvektor) konstant ist, handelt es sich bei der Bahnkurve um logarithmische Spiralen.