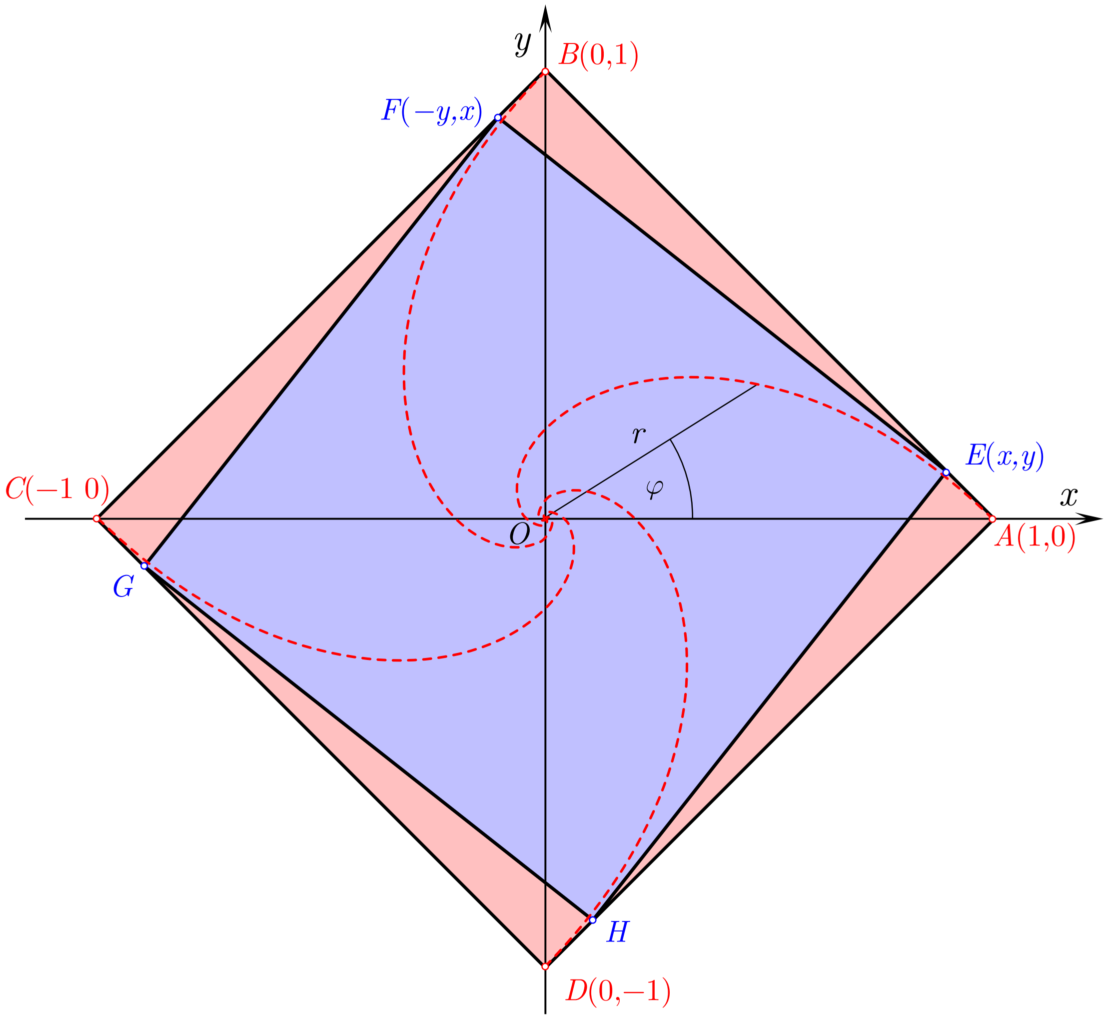
Gegenseitige Verfolgung im Quadrat

Vier Punkte (Mäuse) verfolgen sich in zyklischer Reihenfolge. Wir wissen bereits, dass sich die Mäuse nach jedem diskreten Schritt wieder auf den Ecken eines regulären Polygons befinden, wenn das auch ihre Startformation war. Betrachten wir die Maus A, welche die Maus B verfolgt in der Situation nach dem ersten diskreten Schritt im Fall von vier Mäusen, die auf den Ecken eines Quadrates starten.



Skizze (Idee von Élisabeth Busser [1])

Die Steigung der Strecke EF ist

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x-y}{-y-x} = \frac{y-x}{y+x}. \tag{1}$$

Die Visierlinie der Maus A zeigt genau in Richtung der Maus B; die Richtung der Maus A entspricht also genau der Steigung der Strecke EF. Das gilt auch, wenn wir die Schritte infinitesimal klein machen und somit für den kontinuierlichen Fall die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x-y}{-y-x} = \frac{y-x}{y+x} = \frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1} \tag{2}$$

aufstellen. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) 1. Ordnung.

Lösen der DGL durch Substitution. Wir substituieren in der DLG mit $u = \frac{y}{x}$ und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}(u \cdot x)}{\mathrm{d}x} = \frac{u-1}{u+1}. \tag{3}$$

Durch die Produktregel wird dies zu

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x + u = \frac{u-1}{u+1}. \tag{4}$$

Jetzt separieren wir die Variablen

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x = \frac{u-1}{u+1} - u = -\frac{u^2+1}{u+1}, \tag{5}$$

$$-\frac{u+1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

und integrieren die linke Seite nach u, die rechte nach x

$$-\int \frac{u}{u^2+1} + \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

mit Hilfe von [2], S. 72 «Spezielle unbestimmte Integrale» zu

$$-\frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right) - \arctan(u) = \ln(x) + C. \tag{8}$$

Wird u wieder mit $\frac{y}{x}$ ersetzt, erhalten wir das Resultat.

Lösung der DGL.

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\ln(x) + C \tag{9}$$

ist die Lösung mit der Integrationskonstanten C, welche sich durch Einsetzen der Startposition von $A = (1, 0)$ sogleich zu $C = 0$ bestimmen lässt. Durch Vereinfachen von

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) + \ln(x) = \frac{1}{2}\ln(y^2+x^2) - \frac{1}{2}\ln(x^2) + \ln(x) = \ln\left(\sqrt{y^2+x^2}\right) - \ln(x) + \ln(x)$$

haben wir

$$\ln\left(\sqrt{y^2+x^2}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 0. \tag{10}$$

In Polarkoordinaten (r, φ) umschreiben. Da $\arctan(\frac{y}{x})$ gerade dem Winkel φ und $r = \sqrt{x^2+y^2}$ entspricht, ist das Umschreiben in Polarkoordinaten besonders einfach

$$\ln(r) + \varphi = 0 \tag{11}$$

oder

$$\boxed{r = \mathrm{e}^{-\varphi}}. \tag{12}$$

Rektifikation. Die Länge einer Kurve in Polarkoordianten ist

$$L = \int \mathrm{d}s \tag{13}$$

mit

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi; \tag{14}$$

für den obigen Fall ist

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{e}^{-2\varphi} + \mathrm{e}^{-2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2\mathrm{e}^{-2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\varphi}\,\mathrm{d}\varphi. \tag{15}$$

Die Mäuse starten bei $\varphi = 0$ und winden sich um den Ursprung, dem sie dabei beliebig nahe kommen, ihn aber nie erreichen. Die Länge ist also

$$L = \int_0^\infty \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}, \tag{16}$$

d.h. gerade so lang wie die Seite des Quadrats, auf welchem sie am Anfang starten.

Literatur

[1] Robert Ferréol, Alain Esculier: *Encyclopédie des formes mathématiques remarquables.* `https://mathcurve.com/courbes2d/poursuite/poursuitemutuelle.shtml` [4. Juli 2021].

[2] Werner Durandi, Samuel Byland et al.: *Formeln, Tabellen, Begriffe.* Orell Füssli Verlag, Zürich 2009. ISBN 978-3-280-04059-1.